



TITLE:

# 再び淀み点近くの流れの安定について (連続体力学における非線型方程式の近似解法)

AUTHOR(S):

飯田, 誠一

---

CITATION:

飯田, 誠一. 再び淀み点近くの流れの安定について (連続体力学における非線型方程式の近似解法). 数理解析研究所講究録 1975, 244: 31-46

ISSUE DATE:

1975-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105617>

RIGHT:

## 再び淀み点近くの流れの安定について

北大 工 飯田誠一

にぶい物体の淀み点近くの流れに、速度変動を Fourier 展開して *third order* までの解析を行ない、*subcritical threshold instability* の起る可能性のあることを前回の報告<sup>1)</sup>で述べた。淀み点の曲率半径が有限な場合、基本速度をあらわす流れ関数は、平面壁に向かう二次元淀み流れにおける Hiemenz 関数と  $\varepsilon = 1/\sqrt{Re}$  ( $Re$  は曲率半径  $R$  を代表長さとするレイノルズ数) 程度の相異をもつ関数で与えられるが、ここで用いた関数には、物体表面に発達する排除厚の影響が省かれていることが谷<sup>2)</sup>によって指摘された。基本速度を  $\varepsilon$  の大きさまで問題にする場合、物体の形状が十分下流まで確定されている必要のあることから、はく離をともなう円柱の淀み点近くの流れについて、とくに線形安定理論の部分を検討している。そのため、変動速度成分をも  $\varepsilon$  で展開することを試み、 $O(\varepsilon^0)$  と  $O(\varepsilon^1)$  の大きさにおける解の性質を明らかにしている。

### 1. 淀み点近くの流れをあらわす基本速度

有限な曲率半径  $R$  をもつ淀み点近くの流れを、平面壁に向かう淀み流れと比較するとき、曲率の影響は  $1/\sqrt{Re}$  程度の相異となつてあらわれるが、同時にこの程度の大きさでは、壁面に沿って発達する境界層の排除厚の影響も問題になる [Van Dyke<sup>3), 4), 5)</sup> ]。曲率の影響は局所的であるのに対して、排除厚の影響は流れの場全体に関係するため、淀み点近くの流れに問題を限る場合でも、あらかじめ物体の形状を指定しておく必要がある。

ここでは円柱の淀み流れを取扱うことにし、座標系は円柱極座標  $(r, \theta, z)$  を用いる。ただし  $r$ : 半径,  $\theta$ : 淀み点からの角度,  $z$ : 円柱の軸方向距離。このような流れ場は、はく離をとまなうことになるので Parkinson & Jandari<sup>6)</sup> のはく離模型を用いた Bluston & Paulson<sup>7), 8)</sup> による手法を参考にして解析を試みる。この場合のレイノルズ数範囲は、対称はく離であることと境界層が乱流に遷移しないことを前提にしているので  $10^4 < Re < 10^5$  である。

二次元的な平均流を仮定すれば、座標軸  $(r, \theta, z)$  方向の速度成分は  $(V, U, 0)$ , 渦度の成分は  $(0, 0, \Omega)$  とあらわすことができ、基礎式は次のようになる:

$$-\Omega U + \frac{\partial B}{\partial \kappa} + \frac{\nu}{\kappa} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = 0 \quad (1)$$

$$\Omega V + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial B}{\partial \theta} - \nu \frac{\partial \Omega}{\partial \kappa} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial(\kappa V)}{\partial \kappa} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \quad (3)$$

ただし

$$B = \frac{P}{\rho} + \frac{(V^2 + U^2)}{2}, \quad \Omega = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial(\kappa U)}{\partial \kappa} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (4)$$

$\rho$ : 密度,  $\nu$ : 動粘性係数,  $P$ : 圧力

ここで一様流の速度  $V_\infty$  に適当な定数 ( $2m$ ) を乗じてえられる  $V_* = 2m V_\infty$  を代表速度とし、曲率半径  $R$  を代表長さとするレイノルズ数を

$$Re = \frac{R V_*}{\nu} = \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad V_* = 2m V_\infty \quad (5)$$

と定義する。Van Dyke<sup>3)</sup> にしたがって、境界層の外部および内部における  $\kappa$ ,  $\theta$  方向の速度成分を

$$\left. \begin{aligned} V &\rightarrow V_1 + \varepsilon V_2 + \cdots = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \cdots \\ U &\rightarrow U_1 + \varepsilon U_2 + \cdots = u_1 + \varepsilon u_2 + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

のように展開し、壁面  $y=0$  ( $\kappa=R+y$ ) で速度成分が 0 になる条件といくつかの *matching conditions* を考慮して、 $\varepsilon^n$  のべき数 ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) に関する方程式を解く。

### 一次外部解

はく離をともなう円柱周辺の流れにおいて、はく離点位置

$\theta_s$  を未知定数,  $\theta_2$  を補助変数として

$$\frac{U_1}{V_\infty} = \frac{\sin \theta_2 (1 - 2 \cos \alpha \cos \theta_2 + \cos^2 \alpha)}{\frac{2}{3} \frac{\sin^3 \alpha}{\sin \theta_s} + \cos \alpha - \cos \theta_2} \quad (7)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta &= \frac{2(1 - \cos \alpha \cos \theta_2) \cos \alpha \sin \theta_2}{(1 - \cos \alpha \cos \theta_2)^2 - \cos^2 \alpha \sin^2 \theta_2} \\ \alpha &= \frac{\pi - \theta_s}{2}, \quad \text{後流の幅 } H = \frac{4}{3} \pi R \sin^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

で与えられる [Bluston & Paulson <sup>7)</sup>].

平面壁に向う淀み流れ ( $R \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) の場合,  $(\frac{\partial U_1}{\partial x})_{x=0} = a$  ( $a$  は定数,  $x$  は淀み点から壁面に沿う距離) とおけること  
に對比して,  $(\frac{\partial U_1}{\partial \theta})_{\theta=0} = aR$  を (5) 式で定義した代表速度に  
選べば

$$V_* = (\frac{\partial U_1}{\partial \theta})_{\theta=0} = 2mV_\infty = aR, \quad m = \frac{3(1 + \cos \alpha)^2}{4(1 + 2 \cos \alpha)} \quad (9)$$

となる。

### 一次内部解

$U_1$ ,  $U_1$  を決定する方程式は, 無次元流れ関数  $\psi$  を導入  
して

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + U_1^* \frac{\partial U_1^*}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} X = \frac{x}{R} = \theta, \quad \eta = \frac{y}{ER}, \quad U_1^* = \frac{U_1}{U_*} \\ u_1(\eta, X) = U_* \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v_1(\eta, X) = -U_* \frac{\partial \psi}{\partial X} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

となる。さらに (10) 式は Falkner & Skan の変換

$$\eta_1 = \eta \sqrt{\frac{U_1^*}{X}}, \quad \psi = \sqrt{X U_1^*} f(\eta_1, X), \quad M = \frac{X}{U_1^*} \frac{dU_1^*}{dX} \quad (12)$$

によって ( ' は  $\eta_1$  による微分をあらわすものとする ),

$$f''' + \frac{(M+1)}{2} f f'' + M(1-f'^2) + X \left( f'' \frac{\partial f}{\partial X} - f' \frac{\partial f'}{\partial X} \right) = 0 \quad (13)$$

のように書ける。とくに淀み点の近く ( $X \rightarrow 0$ ) では、 $U_1^* \rightarrow X$

,  $M \rightarrow 1$ ,  $\eta_1 \rightarrow \eta$  であるから、 $(f)_{X \rightarrow 0} = F(\eta)$  は

$$F''' + F F'' - F'^2 + 1 = 0 \quad (14)$$

を満足する、いわゆる Hiemenz 関数となる。

壁面に沿う速度  $U_1(X)$  は、(7) 式から  $\theta_s$  を仮定することによって求められるので、(10) 式あるいは (13) 式を数值的に解けば、壁面摩擦応力  $\tau_w$  が 0 になる位置  $X = X_s$  を決定できる。 $\theta_s$  を適当に選んで  $\theta_s = X_s$  となる位置を求めるとかできれば、これがはく離点を与えることになる。

(10) 式は、 $X = 0$  が特異点になっていることを考慮して、最初の数ステップだけを (13) 式によって、あとは (10) 式によ

って数值的に解く。結果を右表

に示す。これより、 $\theta_s = 1.37$

として はく離点の位置が決定さ

$\theta_s$	$X_s$	$\theta_s - X_s$
1.36	1.3615	-0.0015
1.37	1.3701	-0.0001
1.38	1.3780	0.0020

れる。なお、Bluston & Paulson<sup>7), 8)</sup> は Blottner & Flügge-Lotz<sup>9)</sup> の数値計算法を用いて、 $\theta_s = 1.45$  (一次解)、 $\theta_s = 1.37$  (二次解) をえている。

### 二次外部解

(7) 式に含まれる未知定数  $\theta_s$  が 1.37 と決定されたので、 $U_1$  および排除厚  $\delta^*$  の分布が確定する。matching condition は壁面において  $V_2(X) = \frac{d(U_1 \delta_1)}{dX}$  である ( $\delta_1$  は無次元排除厚  $\delta_1 = \frac{\delta^*}{\epsilon R}$ )。これより、壁面に沿う速度は

$$U_2(X) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\theta_s}^{\theta_s} \frac{V_2(\xi) \sin(\xi - X)}{1 - \cos(\xi - X)} d\xi \quad (15)$$

から求められる。(15) 式の積分を淀み点近くについて行ない

$$\frac{U_2(X)}{U_*} = \gamma X + O(X^2) \quad (16)$$

の形に書くときの  $\gamma$  を求めたところ、 $\gamma = -0.107$  なる結果をえた。

### 二次内部解

淀み点近くでの無次元流れ関数を

$$\psi = X f(\eta), \quad f(\eta) = F(\eta) + \epsilon K(\eta) \quad (17)$$

とおくとき、 $F(\eta)$  については (14) 式が成立しており、 $K(\eta)$  については 3 階常微分方程式 (線形) がえられる。Van Dyke

3), 4) にしたがって、これを曲率の影響をあらわす項  $G(\eta)$

と排除厚の影響をあらわす項  $\gamma H(\eta)$  に分ければ

$$K(\eta) = G(\eta) + \gamma H(\eta) \quad (18)$$

$$G''' + FG'' - 2F'G' + F''G = \eta(1 - F''') + \delta_1 \quad (19)$$

$$H''' + FH'' - 2F'H' + F''H = -2 \quad (20)$$

$$G(0) = G'(0) = 0, \quad G'(\infty) = -\eta \quad (\eta \rightarrow \infty) \quad (21)$$

である。なお (20) 式の解  $H$  は  $F$  によって

$$H = \frac{1}{2}(F + \eta F') \quad (22)$$

のように与えられる。(19) 式の数値解から、淀み点近くの流れをあらわす基本速度は次のように求まる。

$$U = V_* \times f' = a \times \{F'(\eta) + \varepsilon K'(\eta)\} \quad (23)$$

$$V = -\varepsilon V_* f = -\sqrt{\nu a} \{F(\eta) + \varepsilon K(\eta)\} \quad (24)$$

$$\eta = 0: F(0) = F'(0) = G(0) = G'(0) = 0$$

$$F''(0) = 1.232588, \quad G''(0) = 1.913256$$

$$\eta \rightarrow \infty: F(\eta) \rightarrow \eta - \delta_1, \quad \delta_1 = 0.647900$$

$$G(\eta) \rightarrow -\frac{\eta^2}{2} - g_1, \quad g_1 = 0.736847$$

(25)



## 2. 淀み臭近くの流れの安定

速度  $\nabla$  を平均量  $\bar{\nabla}$  と変動量  $\hat{\nabla}$  に分離し、 $\bar{\nabla}$  の成分  $(\bar{v}, \bar{u}, \bar{w})$  を  $z$  についての平均、 $\hat{\nabla}$  の成分  $(\hat{v}, \hat{u}, \hat{w})$  を  $z$  についての Fourier 級数

$$\hat{v}_j = \sum_{n=1}^{\infty} e^{ni k z} v_j^{(n)}(r, \theta, t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ni k z} \tilde{v}_j^{(n)}(r, \theta, t) \quad (26)$$

であらわす。  $v_j$  には順次  $v, u, w$  をあてはめる。  $k$  は波数、 $\sim$  は共役成分である。

$v_j^{(n)}(r, \theta, t)$  から時間  $t$  を分離するため Stuart<sup>(10), (11)</sup>, Watson<sup>(12), (13)</sup> による無次元振幅  $A(t)$  を導入して

$$v_j^{(n)}(r, \theta, t) = A^n(t) \sum_{\ell=0}^{\infty} A_0^{2\ell} v_{j\ell}^{(n)}(r, \theta), \quad A_0^2 = A\tilde{A} \quad (27)$$

とおく。  $A(t)$  の時間的变化は

$$\frac{dA}{dt} = A(a_0 + A_0^2 a_1 + \dots) \quad (28)$$

で与えられ、  $a_0$  は線形理論における増幅率である。

渦度方程式と連続の式：

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{rot}(\omega \times \nabla) + \nu \text{rot}(\text{rot} \omega) = 0, \quad \omega = \text{rot} \nabla \quad (29)$$

$$\text{div} \nabla = 0 \quad (30)$$

に  $\nabla = \bar{\nabla} + \hat{\nabla}$  を代入し、変動成分に関する方程式を  $A^n A_0^{2\ell}$  ( $n=1, 2, \dots, \ell=0, 1, \dots$ ) のべき級数にまとめれば、各べき指数について一連の方程式をうる事ができる。

とくに、連続の式 (30) については次のような一般式がえられる。

$$\frac{\partial v_l^{(n)}}{\partial r} + \frac{v_l^{(n)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_l^{(n)}}{\partial \theta} + n i k w_l^{(n)} = 0 \quad (31)$$

これに対して、渦度方程式の方は指数  $n$ ,  $l$  の増加につれて、レイノルズ応力に起因する高次の非線形項があらわれるため、簡単な表示にはならない。

本報告では、第一段階である  $n=1$ ,  $l=0$  の場合  $[O(A)]$  だけを検討するに留める。

波数  $k$  と増幅率  $\alpha_0$  を無次元量  $k = \varepsilon R k$ ,  $\alpha_0 = R \alpha_0 / V_*$  であらわれ、連続の式が最も簡単な表<sub>入</sub><sup>示</sup>になるように変動成分を次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} v_0^{(1)} &= -V_* \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\eta} v(\eta) \\ u_0^{(1)} &= V_* \theta u(\eta) \\ w_0^{(1)} &= -i \frac{V_*}{k} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\eta} w(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

渦度方程式 ( $r, \theta$  方向) および連続の式は

$$u'' + \frac{f+\varepsilon}{1+\varepsilon\eta} u' - \left\{ \alpha_0 + k^2 + \frac{2f'}{1+\varepsilon\eta} - \frac{\varepsilon(f-\varepsilon)}{(1+\varepsilon\eta)^2} \right\} u + \left\{ \frac{f''}{1+\varepsilon\eta} + \frac{\varepsilon f'}{(1+\varepsilon\eta)^2} \right\} v = 0 \quad (33)$$

$$\omega'' + \frac{f-\varepsilon}{1+\varepsilon\eta} \omega' - \left\{ \alpha_0 + k^2 - \frac{f'}{1+\varepsilon\eta} + \frac{2\varepsilon f}{(1+\varepsilon\eta)^2} \right\} \omega - \frac{2\varepsilon k^2}{1+\varepsilon\eta} u = 0 \quad (34)$$

$$v' - u - w = 0 \quad (35)$$

となる。ただし

$$f = F + \varepsilon K, \quad \omega = \omega' - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\eta} \omega - k^2 v \quad (36)$$

境界条件は、 $\eta = 0$  で  $u(0) = v(0) = w(0) = 0$ ;  $\omega(0) = 1$ ,

$\eta \rightarrow \infty$  でこれらの成分が発散しないこと、である。

ここで、変動成分および無次元波数を  $\varepsilon$  で展開し

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad v = v_0 + \varepsilon v_1 + \dots, \quad w = w_0 + \varepsilon w_1 + \dots \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots, \quad \kappa = \kappa_0 + \varepsilon \kappa_1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

とあって、(33)~(36)式に代入すれば、変動速度の  $O(A \cdot \varepsilon^n)$  ,  $(n=0, 1, \dots)$  に関する方程式をうる。

### $O(A \cdot \varepsilon^0)$

$O(\varepsilon^0)$  に関する方程式は次のようである。

$$u_0'' + F u_0' - (\alpha_0 + \kappa_0^2 + 2F') u_0 = -F'' v_0 \quad (38)$$

$$\omega_0'' + F \omega_0' - (\alpha_0 + \kappa_0^2 - F') \omega_0 = 0 \quad (39)$$

$$v_0' - u_0 - w_0 = 0 \quad (40)$$

$$\text{ただし} \quad \omega_0 = w_0' - \kappa_0^2 v_0 \quad (41)$$

これらは、平面壁に向う淀み流れについて Görtler<sup>14)</sup> および Hammerlin<sup>15)</sup> が取扱っている方程式と同形である。

$\eta$  の大きい領域では  $F(\eta) \simeq \eta - \delta_1$  であることから、(38), (39)式は

$$u_0'' + (\eta - \delta_1) u_0' - (\alpha_0 + \kappa_0^2 + 2) u_0 = 0 \quad (42)$$

$$\omega_0'' + (\eta - \delta_1) \omega_0' - (\alpha_0 + \kappa_0^2 - 1) \omega_0 = 0 \quad (43)$$

となる。(42), (43)式の解は超幾何関数であらわされ、 $\eta \rightarrow \infty$  で解が発散しないように積分定数を決めれば、 $s = \eta - \delta_1$  とおくことにして

$$u_0(s) \simeq c_1 e^{-\frac{s^2}{2} - (\alpha_0 + k_0^2 + 3)} \left[ 1 - \frac{(\alpha_0 + k_0^2 + 3)(\alpha_0 + k_0^2 + 4)}{2s^2} + \dots \right] \rightarrow 0 \quad (44)$$

$$\omega_0(s) \simeq c_2 s^{\alpha_0 + k_0^2 - 1} \left[ 1 - \frac{(\alpha_0 + k_0^2 - 1)(\alpha_0 + k_0^2 - 2)}{2s^2} + \dots \right] \quad (45)$$

$u_0$  と  $\omega_0$  が求まれば、 $v_0$  と  $w_0$  は (40), (41) 式から決定でき、

$$v_0(s) \simeq -\frac{c_2}{k_0^2} s^{\alpha_0 + k_0^2 - 1} \left[ 1 + \left(1 - \frac{k_0^2}{2}\right) \frac{(\alpha_0 + k_0^2 - 1)(\alpha_0 + k_0^2 - 2)}{k_0^2 s^2} + \dots \right] \quad (46)$$

$$w_0(s) \simeq \frac{dv_0}{ds} \simeq -\frac{c_2(\alpha_0 + k_0^2 - 1)}{k_0^2} s^{\alpha_0 + k_0^2 - 2} \left[ 1 + \left(1 - \frac{k_0^2}{2}\right) \frac{(\alpha_0 + k_0^2 - 2)(\alpha_0 + k_0^2 - 3)}{k_0^2 s^2} + \dots \right] \quad (47)$$

となる。(44)~(47)式は、 $\eta$ が十分大きい領域での性質をあらわす外部解であり、壁面での条件を満足する  $0 \leq \eta \leq \eta_B$  における内部解と  $\eta = \eta_B$  のところで接続される。外部解の性質から明らかのように、これらの変動成分(最大項は  $v_0$ )は、波数が  $0 < k_0^2 < (1 - \alpha_0)$  であれば発散することはないので、 $k_0$  はこの範囲で連続固有値となる。 $\alpha_0 = 0$  とおくことにして、実験的には  $0 < k_0 < 1$  の範囲に孤立固有値が観測されており (Kestin & Wood<sup>16)</sup>, Čolak-Antić & Hassler<sup>17)</sup>, etc.),  $k_0 = 1$  に対応する波長は実際に観察される波長の下限を与えているように見える [谷<sup>2)</sup>]。

そこで、連続固有値の中から、たて渦が最も存在しやすい波数として、たて渦を形成している変動成分の全エネルギー

$E = \int_0^\infty (v_0^2 + u_0^2 + w_0^2) d\eta$  が最小となる波数を求め、これが観察される波数に相当するものとする。Eを求めるため、

$\eta = \eta_B$  の位置で分割し、 $E = E_1 + E_2$  ;  $E_1 = \int_0^{\eta_B} (v_0^2 + u_0^2 + w_0^2) d\eta$  ,  $E_2 = \int_{\eta_B}^\infty (v_0^2 + u_0^2 + w_0^2) d\eta$  とおく。

外部領域では  $\eta \geq \eta_B$  ,  $v_0^2 \gg w_0^2 \gg u_0^2$  であるから

$$E_2 \simeq \int_{s_B}^{s_\infty} v_0^2 ds \simeq \frac{C_2^2}{K_0^4} \left( \frac{S_\infty^{2\alpha_0 + 2K_0^2 - 1} - S_B^{2\alpha_0 + 2K_0^2 - 1}}{2\alpha_0 + 2K_0^2 - 1} \right) \quad (48)$$

ただし  $S_B = \eta_B - \delta_1$  ,  $S_\infty \rightarrow \infty$

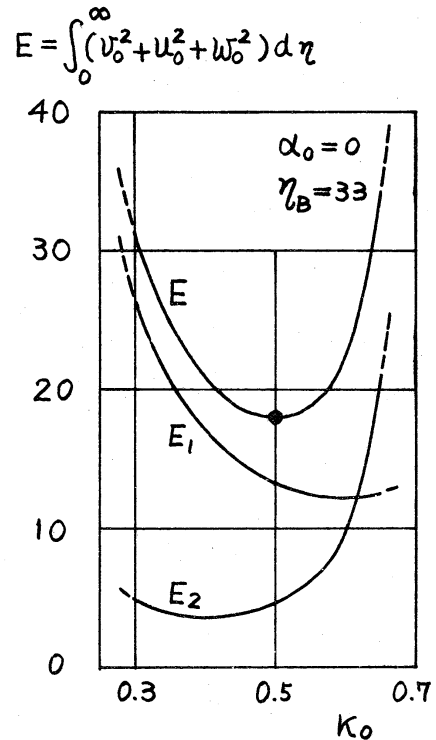
これより、 $E_2$  は  $0 < K_0 < \sqrt{\frac{1}{2} - \alpha_0}$  の間で最小値をもち、両端 ( $K_0 = 0$  ,  $K_0 \geq \sqrt{\frac{1}{2} - \alpha_0}$ ) で  $E_2 \rightarrow \infty$

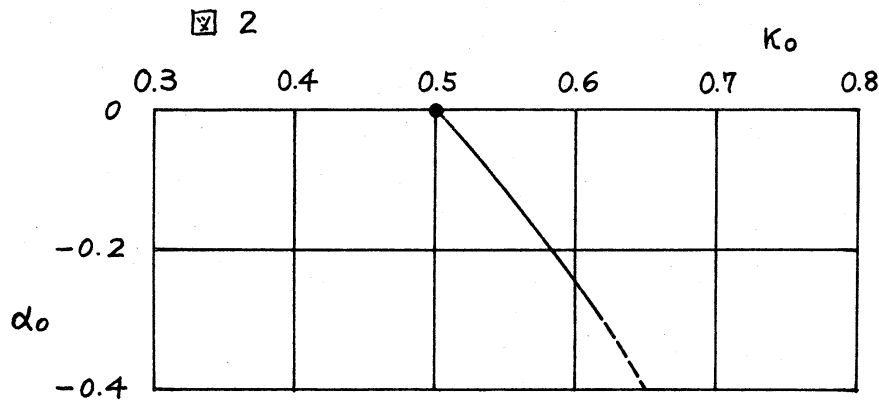
となることがわかる。

一方、 $E_1$  は内部解(数値解)から求められ、 $\eta_B$  を適当に大きな一定値とするとき、 $K_0 \rightarrow 0$  で  $E_1 \rightarrow \infty$  ,  $0 < K_0 < (1 - \alpha_0)$  の範囲で最小値をとり、 $K_0 \rightarrow (1 - \alpha_0)$  で一定値に近づく。

結局、たて渦の保有する全エネルギーは、波数  $K_0$  から  $\sqrt{\frac{1}{2} - \alpha_0}$  にいたる間で最小値をもつように変化することになる。計算結果が

図 1





ら、一例として、 $\alpha_0 = 0$  ,  $\eta_B = 33$  における  $E, E_1, E_2$  の  $K_0$  に対する変化を図 1 に示す。 $K_0$  が小さくなるにつれ、 $E_2 < E_1 \rightarrow \infty$  となるのは、 $\eta < \eta_B$  の領域で変動成分が急激に増大するからである。 $\alpha_0$  が負になれば、それにともなって  $E$  は減少するが、 $E$  の最小値を与える波数  $K_0$  は逆に増加する。図 2 に  $\alpha_0$  と  $K_0$  の関係を示す。とくに  $\alpha_0 = 0$  のときには  $K_0 = 0.50$  である。

### $O(A - \varepsilon')$

$O(\varepsilon^0)$  のときと同様、この場合の方程式は

$$u_1'' + F u_1' - (\alpha_0 + K_0^2 + 2F') u_1 = -F'' v_1 - (K'' - \eta F'' + F') v_0 \\ - (1 + K - \eta F) u_0' + (2K_0 K_1 + 2K' - 2\eta F' - F) u_0 \quad (49)$$

$$\omega_1'' + F \omega_1' - (\alpha_0 + K_0^2 - F') \omega_1 = (1 - K + \eta F) \omega_0' \\ + (2K_0 K_1 - K' + \eta F' + 2F) \omega_0 + 2K_0^2 u_0 \quad (50)$$

$$v_1' - u_1 - \omega_1 = 0 \quad (51)$$

ただし  $\omega_1 = \omega_1' - \kappa_0^2 v_1 - 2\kappa_0 \kappa_1 v_0 - \omega_0$  (52)

$\eta$  の大きい領域では、基本速度に関する性質 (25) 式から

$$F \simeq \eta - \delta_1, \quad K \simeq -\frac{\eta^2}{2} + \gamma\eta - g_1 - \frac{\gamma\delta_1}{2} \quad (53)$$

が知られているので、外部解を決定する方程式は

$$\begin{aligned} u_1'' + (\eta - \delta_1)u_1' - (\alpha_0 + \kappa_0^2 + 2)u_1 \\ = \left\{ \frac{3}{2}\eta^2 - (\delta_1 + \gamma)\eta + g_1 + \frac{\gamma\delta_1}{2} - 1 \right\} u_0' + \{-5\eta + 2\gamma + \delta_1 + 2\kappa_0 \kappa_1\} u_0 \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \omega_1'' + (\eta - \delta_1)\omega_1' - (\alpha_0 + \kappa_0^2 - 1)\omega_1 \\ = \left\{ \frac{3}{2}\eta^2 - (\delta_1 + \gamma)\eta + g_1 + \frac{\gamma\delta_1}{2} + 1 \right\} \omega_0' + \{4\eta - \gamma - 2\delta_1 + 2\kappa_0 \kappa_1\} \omega_0 + 2\kappa_0^2 u_0 \end{aligned} \quad (55)$$

となる。 $s = \eta - \delta_1$  において外部解を求めれば

$$u_1(s) \simeq c_1 e^{-s^{3/2}} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{2\delta_1 - \gamma}{2s} + \dots \right] \rightarrow 0 \quad (56)$$

$$\omega_1(s) \simeq c_2 s^{\alpha_0 + \kappa_0^2} \left[ \left\{ \frac{3}{2}(\alpha_0 + \kappa_0^2 + 1) + 1 \right\} + \{(\alpha_0 + \kappa_0^2)(2\delta_1 - \gamma) + 2\kappa_0 \kappa_1\} \frac{\log s}{s} + \dots \right] \quad (57)$$

$$v_1(s) \simeq -\frac{c_2}{\kappa_0^2} s^{\alpha_0 + \kappa_0^2} \left[ \left\{ \frac{3}{2}(\alpha_0 + \kappa_0^2 + 1) + 1 \right\} + \{(\alpha_0 + \kappa_0^2)(2\delta_1 - \gamma) + 2\kappa_0 \kappa_1\} \frac{\log s}{s} + \dots \right] \quad (58)$$

$$\omega_1(s) \simeq \frac{d v_1}{d s} \quad (59)$$

をうる。これより、 $O(\varepsilon^1)$  における変動速度成分 (最大項は  $v_1$ ) が発散しないためには  $\alpha_0 + \kappa_0^2 < 0$  となる必要のあることが知られる。この条件を  $O(\varepsilon^0)$  における  $\alpha_0 + \kappa_0^2 - 1 < 0$  とくらべるとき、外部解の次数が一次だけ高くなっていることがわかる。仮りに、同様の議論を  $O(\varepsilon^2)$  まで進めることができたとして (実際の計算をここまで進めるには基本速度を  $O(\varepsilon^2)$  まで求めなければならぬので不可能に近い)、上記の条件を求めれば、 $\alpha_0 + \kappa_0^2 + 1 < 0$  となる。このことは、変動速度成

分 $\psi$ の外部解が、 $\psi_l^*(s)$  ( $l=0,1,\dots$ ) を1の大きさの関数として、

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots \\ &= -\frac{C_2}{K_0^2} s^{\alpha_0 + K_0^2 - 1} [\psi_0^*(s) + \varepsilon s \psi_1^*(s) + \varepsilon^2 s^2 \psi_2^*(s) + \dots]\end{aligned}$$

の形に書くことを示しており、上式の級数[ ]の収束性が問題となる。

この点、十分な検討は済ませていないが、 $\alpha_0$ ,  $K_0$ を適当に仮定して若干の数値計算を試みたところ、 $\delta_1$ ,  $\gamma$ ,  $K_1$ は主として内部解に大きな影響をもつ因子のようである。なお、上述の議論を $O(\varepsilon^1)$ で打ち切ることとし、 $\alpha_0 + K_0^2 = 0$ とたて渦の保有する全エネルギーが最小となる条件から $\alpha_0$ と $K_0$ を求めれば、一応の結果として $\alpha_0 = -0.43$ ,  $K_0 = 0.66$ をうる。

本報告をまとめるにあたり、谷一郎 東京大学名誉教授にはかすかすのご助言、ご指導をいただきました。また、小橋安次郎 北海道大学教授および玉田珪 京都大学教授には有益なご討論をいただきました。ここに謝意を表します。

なお、数値計算には北海道大学大型計算センター：FACOM 230-75 を使用している。



## 文 献

- 1) 飯田 誠一 , 京大数理解析研究所講究録 , 218 (1974), 16-23.
- 2) 谷 一郎 , 京大数理解析研究所講究録 , 218 (1974), 1-15.
- 3) Van Dyke, M., J. Fluid Mech., 14 (1962), 161-177.
- 4) Van Dyke, M., J. Fluid Mech., 14 (1962), 481-495.
- 5) Van Dyke, M., J. Fluid Mech., 19 (1964), 145-159.
- 6) Parkinson, G. V. and Jandali, T., J. Fluid Mech., 40 (1970), 577-594.
- 7) Bluston, H. S. and Paulson, R. W., J. de Mécanique, 11 (1972), 161-180.
- 8) Bluston, H. S. and Paulson, R. W., J. appl. Math. Phys., 24 (1973),  
488-498.
- 9) Blottner, F. G. and Flügge-Lotz, I., J. de Mécanique, 11 (1963),  
397-423.
- 10) Stuart, J. T., J. Fluid Mech., 4 (1958), 1-21.
- 11) Stuart, J. T., J. Fluid Mech., 9 (1960), 353-370.
- 12) Watson, J., J. Fluid Mech., 9 (1960), 371-389.
- 13) Watson, J., J. Fluid Mech., 14 (1962), 211-221.
- 14) Görtler, H., Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung (hrsg. v. H. Görtler  
u. W. Tollmien), Braunschweig, (1955), 304-314.
- 15) Hämmerlin, G., Fünfzig Jahre Grenzschichtforschung (hrsg. v. H. Görtler  
u. W. Tollmien), Braunschweig, (1955), 315-327.
- 16) Kestin, J. and Wood, R. T., Progress in Heat and Mass Transfer, 2  
(1969), 249-253.
- 17) Čolak-Antić, P. and Hassler, H., DFVLR Nachrichten, 5 (1971), 184-186.